22.05.2014

Def. der Erneuerungsfkt. $H: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad H(t) := E \underbrace{N_t}_{\text{Erneuerungsprozess}}$ ist die Anzahl der zu erwartenden Erneuerungen bis zur Zeit t. Bem.: $H(0) = 0$; $\boxed{H(t) = \int_0^t h(x)\,dx}$

Satz: Für die Dichtefkt. $f = -R'$ (Gesamtzuverlässigkeit) und $h := H'$ gilt die Erneuerungsgleichung $\hat{h} \overset{(*)}{=} \frac{\hat{f}}{1-\hat{f}}$ (Laplace)

Bsp.: Dichtefkt. der Exponentialverteilung $f(t) := \lambda e^{-\lambda t} \circ\!\!-\!\!\bullet \Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \overset{(*)}{\Rightarrow} \hat{h}(s) = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{s+\lambda}} = \frac{\lambda}{s}$

$\Rightarrow h(t) = \lambda$ für alle $t \geq 0$ $\quad \Rightarrow H(t) = \int_0^t \lambda = \lambda t$ $\quad (k=1)$

Fazit: Die Anzahl der Erneuerungen von λ-exponentialverteilten Geräten innerhalb der Zeit t beträgt erwartungsgemäß λt. $(k=1)$

Bem.: Im Fall der Erlang-Verteilung mit Dichtefunktion $f(t) := \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}$ (Ordnung $k \in \mathbb{N}$; $k=1 \to$ Exponentialverteilung) lässt H analog berechnen.

z.B.: $H(t) = \frac{1}{2}\left(\lambda t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t}\right)$ für $k=2$

35 3.3 Asymptotik $(t \to \infty)$ für H

a) $\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ (Elementares Erneuerungstheorem) mit $\boxed{\mu := \int_0^\infty t f(t)\,dt}$ $= \text{MTTF}$ = Einheit Zeit → mittlere Lebensdauer; als mittlere Lebensdauer des ~~einzelnen~~ erneuernden Gerätes / Systems

b) $\lim_{t\to\infty} \left(H(t+u) - H(t)\right) = \frac{u}{\mu}$ für alle $u > 0$ (Blackwellsches Erneuerungstheorem)

$\Rightarrow \frac{H(t)}{t} \overset{a}{\approx} \frac{1}{\mu}$ $\overset{t=0}{\text{und}}$ $H(t+u) - (H(t)) \overset{b}{\approx} \frac{u}{\mu}$ für große t $\quad t \approx 50\text{-}100$ Zeiteinheiten je nach Lebensdauer

c) $\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \leq x\right\} = \Phi(x)$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ mit μ wie oben und $\boxed{\sigma := \sqrt{\int_0^\infty t^2 f(t)\,dt - \mu^2}} > 0$

Folgerung: Um einen Erneuerungsprozess (für Geräte der Dichtefkt. f) mit Sicherheit $1-\alpha$ über den Zeitraum T ($T \gg 0$) zu gewährleisten, müssen $\boxed{N \geq \underbrace{\frac{T}{\mu}}_{\text{Erwartete Wert}} + \underbrace{\underbrace{\Phi^{-1}(1-\alpha)}_{z_\alpha} \sigma \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu^3}}}_{\text{Sicherheit}}}$ eingeplant werden. $\quad H(T \gg 0) \approx \frac{T}{\mu}$

Zahlenbeispiel: ~~Gerät~~ System mit mittlere Lebensdauer $\mu := 20\,(h)$ und $\sigma := 3\,(h)$. Wie viel Erneuerungen müssen für 2000 h für 99%-Sicherheit einplanen?

Lösungsweg: Zu erwarten sind $H(2000) \approx \frac{2000}{20} = 100$. Zur Sicherheit muss noch $z_{0{,}01} \cdot 3 \sqrt{\frac{2000}{20^3}}$ $\approx 2{,}33 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \approx 3{,}5$ hinzuaddiert werden.

$\overset{N \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} N \geq 100 + 4 = \underline{104}$

- Die Erneuerungsfkt. des $(n-1)$-von-n Reparatursystems mit absorbierendem Systemausfall kommt aus ZR (QS-Skript 4.5.2): $\boxed{R(t) = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(v_1 e^{v_2 t} - v_2 e^{v_2 t}\right)}$ mit $\boxed{v_{1,2} := \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{d} - (2n-1)\lambda - \mu\right)}$ und $\boxed{d := \lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2}$

$\Rightarrow f(t) = -R'(t) = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{d}}\left(e^{v_1 t} - e^{v_2 t}\right) = \frac{n(n-1)\lambda^2}{\sqrt{d}}\left(e^{v_1 t} - e^{v_2 t}\right) \geq 0 \Rightarrow v_2 < v_1 < 0$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{m(m-1)\lambda^2}{\sqrt{a}} \underbrace{\left(\frac{1}{s-\nu_1} - \frac{1}{s-\nu_2}\right)}_{\frac{\nu_1-\nu_2}{(s-\nu_1)(s-\nu_2)}} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \hat{h}(s) = \frac{m(m-1)\lambda^2(\nu_1-\nu_2)}{\sqrt{a}\,(s-\nu_1)(s-\nu_2) - (\nu_1-\nu_2)\cdot m(m-1)\lambda^2}$$

$$= \frac{m(m-1)\lambda^2}{(2m-1)\lambda+\mu} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(2m-1)\lambda+\mu}\right)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{m(m-1)\lambda^2}{(2m-1)\lambda+\mu}\left(1 - e^{-\overbrace{((2m-1)\lambda+\mu)}^{\text{Dämpfungsfakt.}}t}\right)$$

(37) Aufgabe 4.8 4.7

$$\overset{H(0)=0}{\underset{H'=h}{\Longrightarrow}} H(t) = \frac{m(m-1)\lambda^2}{((2m-1)\lambda+\mu)^2} \cdot \left[((2m-1)\lambda+\mu)t + e^{-((2m-1)\lambda+\mu)t} - 1\right] \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{t}{H(t)} = \frac{((2m-1)\lambda+\mu)^2}{m(m-1)\lambda^2} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\underbrace{((2m-1)\lambda+\mu)}_{\nu}t - 1} = \underline{\underline{\frac{\overbrace{(2m-1)\lambda+\mu}^{\nu}}{m(m-1)\lambda^2}}} \left(\text{Einheit}[\mu] = \frac{1}{t}\right) = \text{MTFF}$$

$\hookrightarrow e^{-t\dots}$ fällt weg, da $e^{-t\to\infty} \to 0$ $\quad \underbrace{}_{= 1/\nu}$

mit Reparaturrate μ und (Einzel-)Ausfallrate λ